Атомарные функции

По определению атомарные функции (АФ) представляют собой финитные бесконечно дифференцируемые функции, являющиеся решениями дифференциальных уравнений со смещенным аргументом вида

$$Lf(x) = \lambda \sum_{k=1}^{M} c_k f(ax - b_k), \qquad |a| > 1, \tag{1}$$

где L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. В случае $a = 1$ и $b_k \equiv 0 \left(k = \overline{1,M}\right)$ выражение (1) становится обыкновенным дифференциальным уравнением.

Наиболее простые и важные АФ составлены из бесконечных сверток прямоугольных импульсов. Как известно, прямоугольный импульс имеет спектр вида $\sin(x)/x$, и, с помощью интеграла Фурье, может быть представлен в следующем виде:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux) \frac{\sin(u/2)}{u/2} du. \tag{2}$$

Далее для краткости будем обозначать $\sin(x)/x = \operatorname{sinc}(x)$.

N- кратная свертка $(N+1)$ одинаковых прямоугольных импульсов $\varphi(x)$ представляет собой финитный сплайн $\theta_N(x)$, который аналогично может быть записан в виде интеграла Фурье (рис. 1):

$$\theta_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux)\operatorname{sinc}^{N+1}(u/2)du. \quad (3)$$

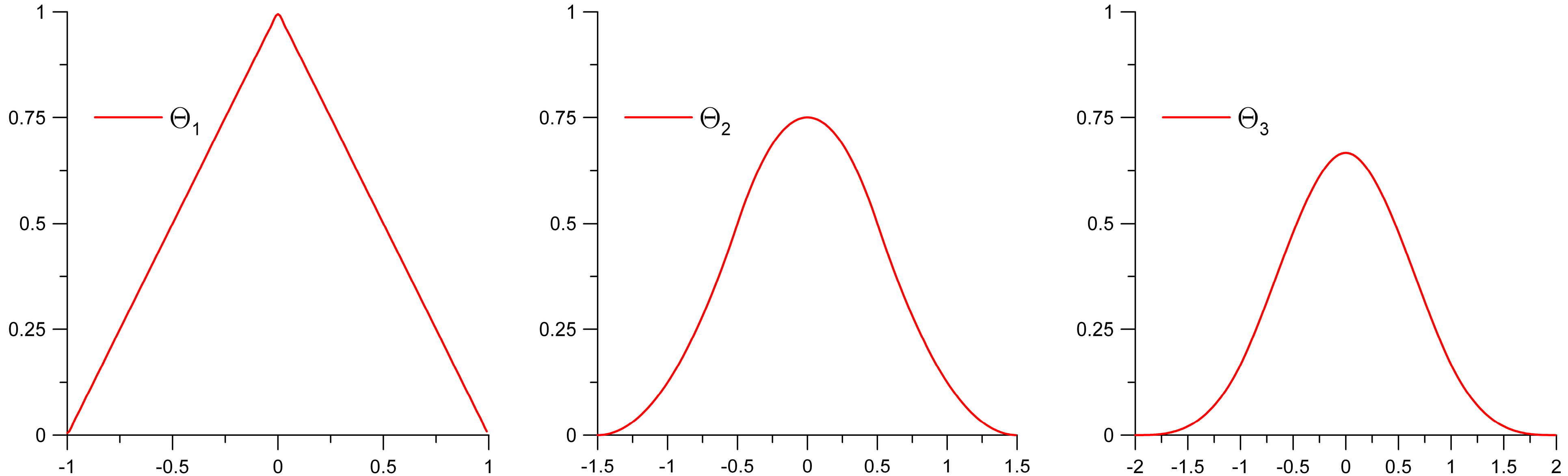

Рис 1. Финитные сплайны

Рассмотрим свертку импульсов переменной длины

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}2^{n-1}, & |x|\le 2^{-n},\\ 0, & |x|>2^{-n}.\end{cases} \qquad (4)$$

Эту свертку можно повторить бесконечное число раз: $\varphi_1(x)*\varphi_2(x)*\ldots*\varphi_n(x)*\ldots$. Сумма длин свертываемых импульсов образует геометрическую прогрессию. Результатом такой бесконечной свертки является финитная функция, определенная на интервале $[-1;1]$. Нетрудно показать, что она удовлетворяет уравнению вида (1)

$$f'(x)=2f(2x+1)-2f(2x-1), \qquad (5)$$

с условием $f(0)=1$. Уравнение (5) может быть интерпретировано следующим образом. Если некоторая дифференцируемая функция имеет один участок возрастания и один участок убывания, то ее производная, соответственно, состоит из положительного и отрицательного участков. Требуется найти такую функцию, у которой эти участки подобны самой функции. Такая задача впервые была поставлена и решена в 1967 г. В.Л. Рвачёвым, а её решение предложено обозначать через $\mathrm{up}(x)$.

Функция $\mathrm{up}(x)$ аналогично (2) и (3) имеет следующее представление:

$$\mathrm{up}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux)\prod_{k=1}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(u\, 2^{-k}\right)du\,. \tag{6}$$

Из свертки функций $\theta_n(x)$ и $\mathrm{up}(x)$ составляется другая важная функция, определенная на интервале $\left[-\frac{N+2}{2}, \frac{N+2}{2}\right]$, которая обозначается $\mathrm{fup}_N(x)$

$$\mathrm{fup}_n(x) = 2\,\mathrm{up}(2x) * \Theta_n(x) = \mathrm{up}(x) * \Theta_{n-1}(x),$$

причем $\mathrm{fup}_0(x) \equiv \mathrm{up}(x)$.

Функция $\mathrm{fup}_N(x)$ представляется в виде

$$\mathrm{fup}_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux)\left(\mathrm{sinc}(u/2)\right)^N \prod_{k=1}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(u\, 2^{-k}\right)du\,. \tag{7}$$

Все три рассмотренные функции $\mathrm{up}(x)$, $\theta_N(x)$ и $\mathrm{fup}_N(x)$ имеют единое общее представление на основе тождества $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x = \prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(2^{-k}x\right)$

$$\varphi_{a,b}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(jux)\prod_{k=1}^{\infty}\left(\cos\left(2^{-k}x\right)\right)^{ak+b}du. \qquad (8)$$

В случае $a=0$, $b=N+1$ имеем $\theta_N(x)$. При $a=1$, $b=-1$ получим $\mathrm{up}(x)$. При $a=1$, $b=N$ выражение (8) дает $\mathrm{fup}_N(x)$.

На примере финитных сплайнов было отмечено, что поскольку они составлены из кусков полиномов того же порядка, то их можно использовать в задачах полиномиальной интерполяции, причем соотношения будут иметь сверточный вид. При этом необходимо учитывать, что финитный сплайн $B_N(x)$ имеет не более $N-1$ непрерывных производных, а для большинства практических задач требуются бесконечно дифференцируемые локальные функции. В этих случаях и оказываются полезными бесконечно дифференцируемые финитные АФ $\mathrm{fup}_N(x)$. Для сравнения приведем одну классическую финитную бесконечно дифференцируемую функцию, введенную Коши в начале XIX в.,

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-1/\left(1-x^2\right)\right), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq 1.\end{cases} \qquad (9)$$

Наиболее полезным свойством АФ является то, что с помощью их сдвигов можно составлять любой многочлен, тогда как из сдвигов функции Коши нельзя составить даже многочлена нулевого порядка (константы). При этом вычислить преобразование Фурье от функции Коши затруднительно, тогда как для АФ оно известно в явном виде. Имеют место также простые выражения для моментов атомарных функций и их связь с производными самих функций.

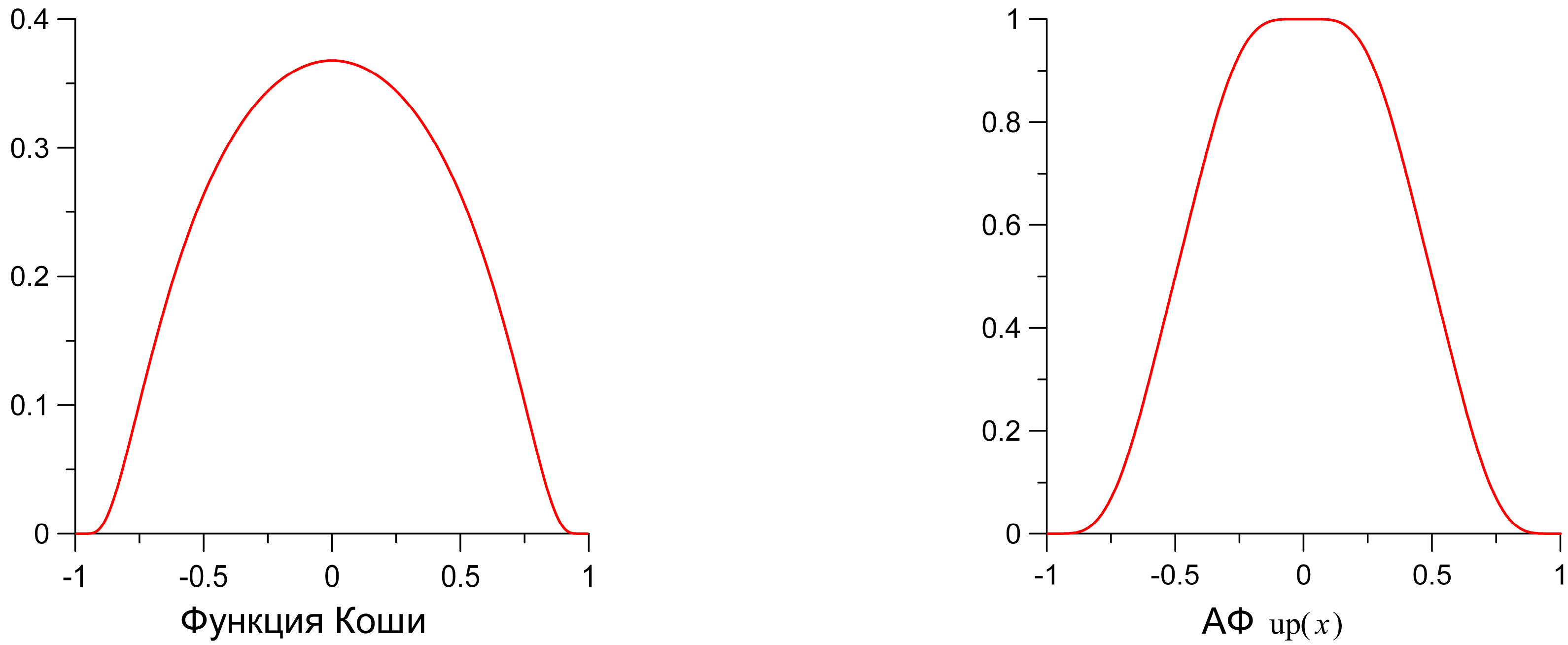

Рис 2 Функция Коши и АФ $\mathrm{up}(x)$

Функция $\mathbf{up}(\mathbf{x})$ и ее свойства

Из приведенных выше определений можно непосредственно получить основные свойства функции $\mathrm{up}(x)$.

1. Функция $\mathrm{up}(x)$ является четной

$$\mathrm{up}(x) = \mathrm{up}(-x), \tag{10}$$

$$\mathrm{up}(x) = 1 - \mathrm{up}(1 - x). \tag{11}$$

2. Максимум $\mathrm{up}(0) = 1$. Функция охватывает единичную площадь

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{up}(x)\,dx = 1. \tag{12}$$

3. Вид функции $\mathrm{up}(x)$ и ее Фурье-спектра, показаны на рис 3. Спектр функции $\mathrm{up}(x)$ также является четной, действительной функцией, быстро затухает и имеет нули в точках, кратных 2π. Уровень первого бокового лепестка спектра равен –23,5 дБ.

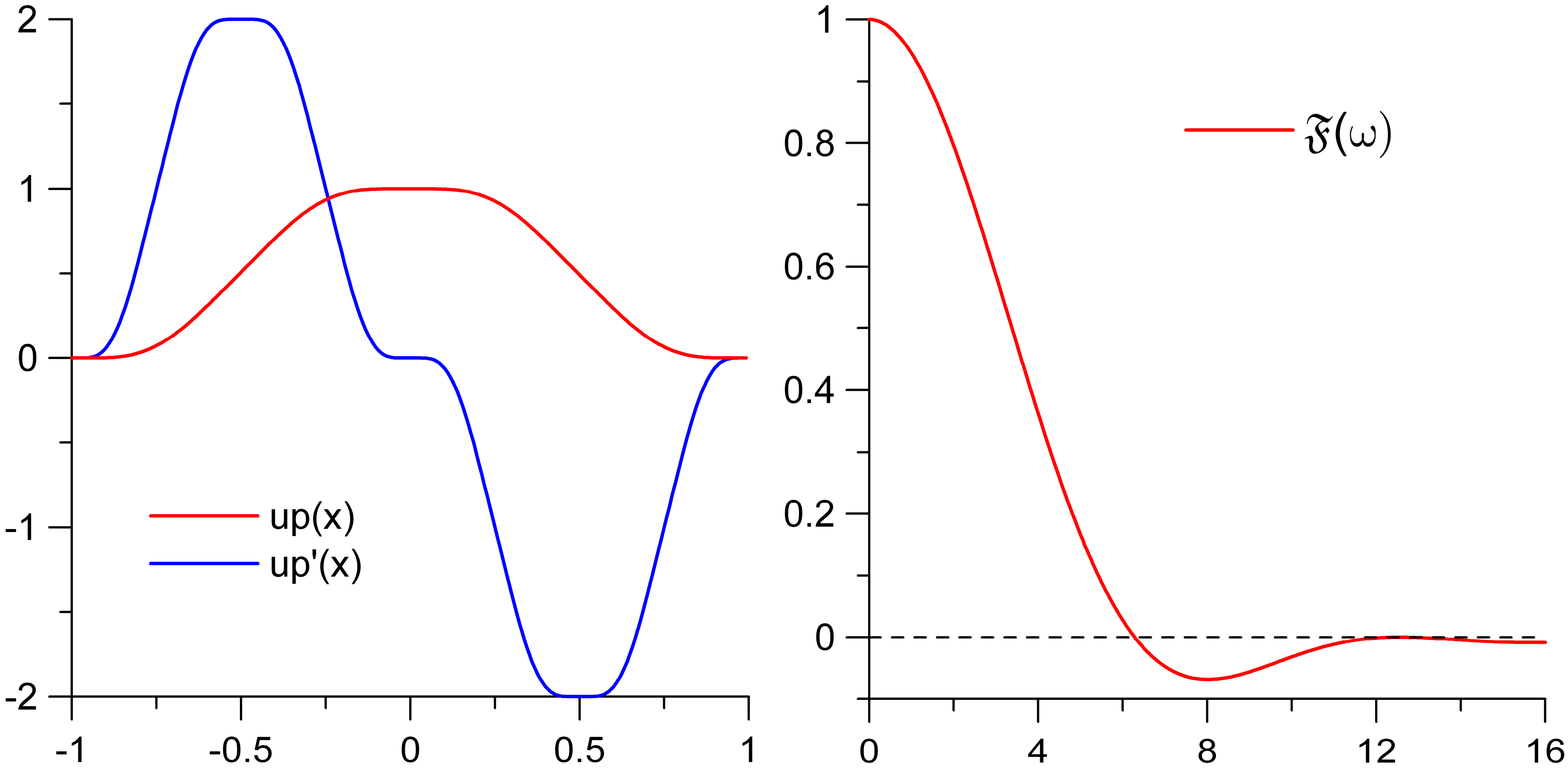

Рис 3. АФ $\mathrm{up}(x)$ и ее спектр

4. Первая производная функции $\mathrm{up}(x)$ имеет простую связь с самой функцией (рис. 4 а)

$$\mathrm{up}'(x) = 2\,\mathrm{up}(2x+1) - 2\,\mathrm{up}(2x-1). \qquad (13)$$

Последовательной подстановкой в (13) получают производные более высокого порядка. Например:

$$\mathrm{up}''(x) = 8\,\mathrm{up}(4x+3) - 8\,\mathrm{up}(4x+1) - 8\,\mathrm{up}(4x-1) + 8\,\mathrm{up}(4x-3)$$

Графики первых четырех производных приведены на (рис. 4).
Производную *n*-го порядка вычисляют с помощью формулы

$$\mathrm{up}^{(n)}(x) = 2^{C_{n+1}^2} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k\,\mathrm{up}\left(2^n x + 2^n + 1 - 2k\right) \qquad (14)$$

где числа δ_k - элементы последовательности Морса-Туэ, определяемые рекуррентными соотношениями: $\delta_1 = 1,\ \delta_{2k} = -\delta_k,\ \delta_{2k-1} = \delta_k;\ C_{n+1}^2$ — биномиальный коэффициент.

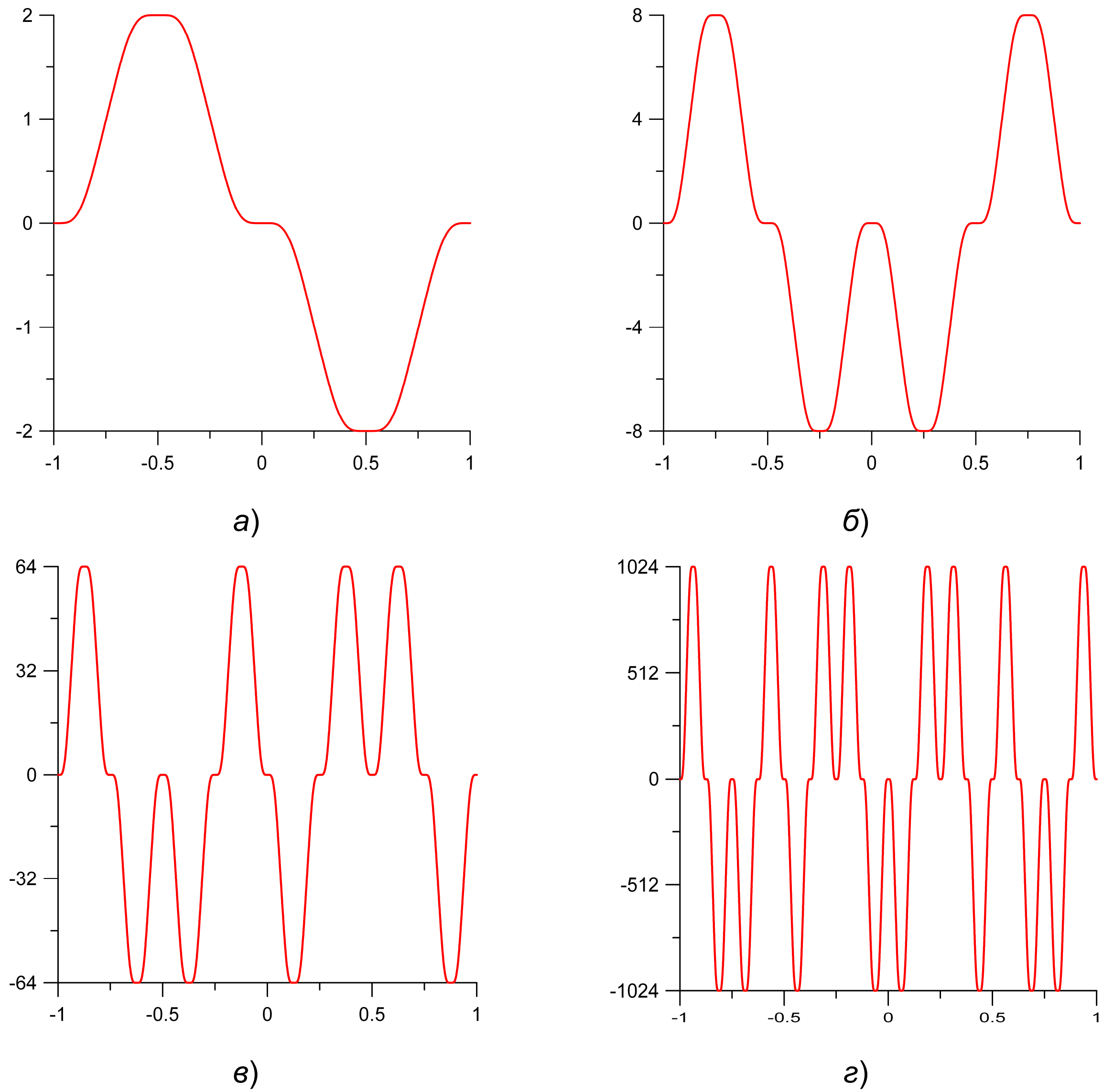

Рис. 4. Графики первых четырёх производных функции $\mathrm{up}(x)$.

Доказательство свойства 4:

$$y'(x) = a\big(y(2x+1) - y(2x-1)\big),$$

$$it\hat{y}(t) = a\left(\tfrac{1}{2}\hat{y}\left(\tfrac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}} - \tfrac{1}{2}\hat{y}\left(\tfrac{t}{2}\right)e^{-i\frac{t}{2}}\right),$$

$$\hat{y}(t) = \tfrac{a}{it}\left(\tfrac{1}{2}e^{i\frac{t}{2}} - \tfrac{1}{2}e^{-i\frac{t}{2}}\right)\hat{y}\left(\tfrac{t}{2}\right) = F\left(\tfrac{t}{2}\right)\hat{y}\left(\tfrac{t}{2}\right),$$

$$F(t) = \frac{a}{2}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \tfrac{a}{2}\,\mathrm{sinc}(t)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{y}(0)\cdot\prod_{k=1}^{\infty} F(t\cdot 2^{-k}). \quad \hat{y}(0) = 1.$$

Бесконечное произведение сходится при $a = 2$

$$up(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi k 2^{-m})}{(\pi \kappa 2^{-m})}\cos(\pi k x)$$

5. Функция $\mathrm{up}(x)$ является решением задачи о разложении единицы (рис. 5а):

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{up}(x-k) \equiv 1. \tag{15}$$

При сдвигах на более короткий шаг можно получить любую степень x:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \,\mathrm{up}\left(x-k\,2^{-N}\right) \equiv x^N, \tag{16}$$

где

$$C_k = \sum_{j=1}^{2^n}\left(\cos(2\pi jk2^{-n})\sum_{i=0}^{\upsilon_2(j)} c_{ji}k^i + \sin(2\pi jk2^{-n})\sum_{i=0}^{\upsilon_2(j)} d_{ji}k^i\right),$$

Например, для $N=1$ и $N=2$ получим соответственно (рис 5б,в):

$$\frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\,\mathrm{up}(x-k/2) \equiv x, \tag{17}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{k^2}{64}-\frac{1}{36}\right)\mathrm{up}(x-k/4) \equiv x^2. \tag{18}$$

Комбинируя формулы (15) и (16) можно составить любой полином. Важно отметить, что в силу финитности функции $\mathrm{up}(x)$ в сумме (16) при каждом x содержится конечное число ненулевых слагаемых равное 2^{N+1}.

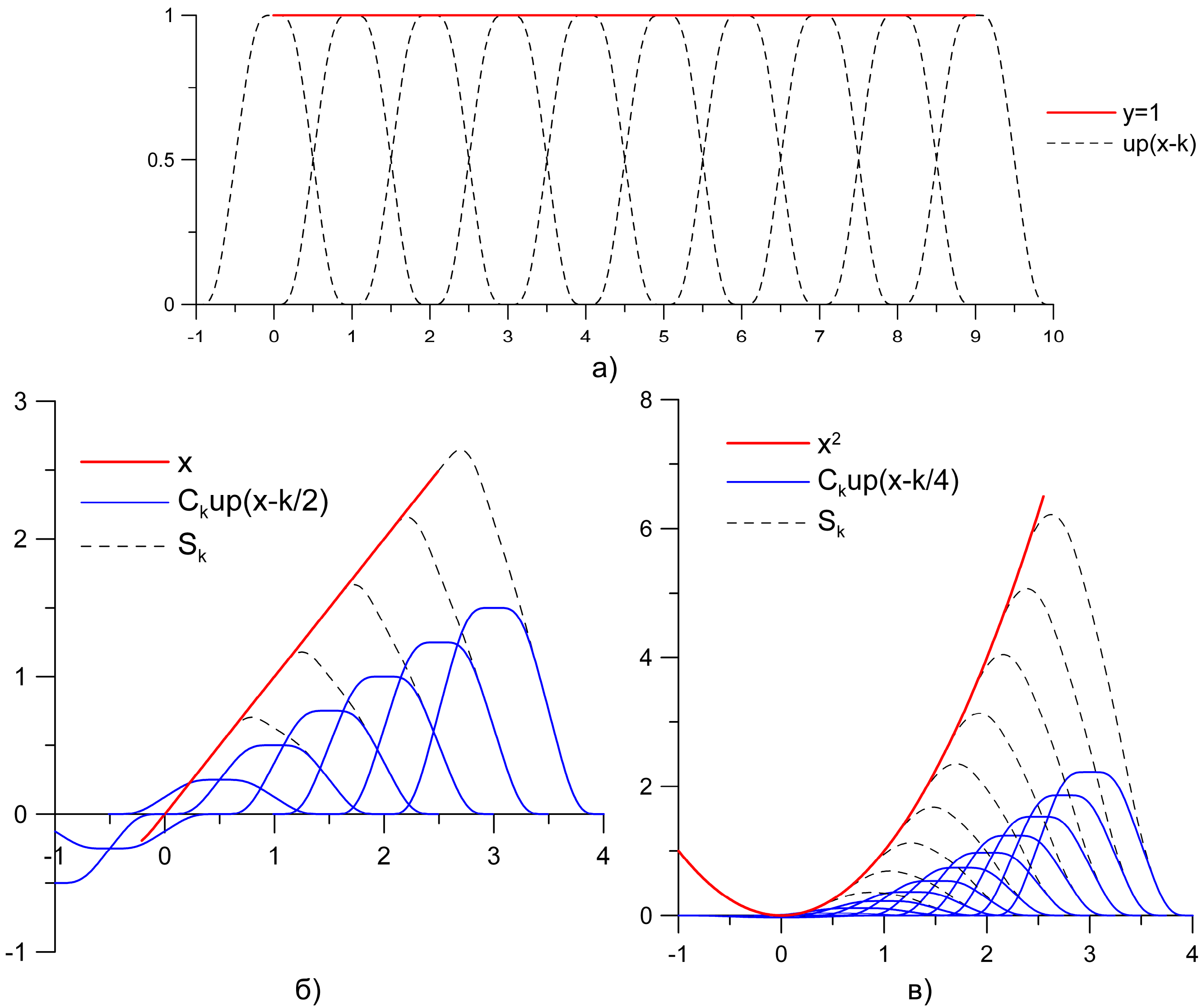

Рис 5. Приближение полиномов сдвигами $\mathrm{up}(x)$

6. Пусть имеет место последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке [-1;1] случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots$. Тогда случайная величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k} \tag{19}$$

имеет плотность вероятности, равную $\mathrm{up}(x)$.

7.Для симметричных моментов функции $\mathrm{up}(x)$

$$a_n = \int_{-1}^{1} x^n \,\mathrm{up}(x)\, dx. \tag{20}$$

имеют место равенства: $a_0 = 1$, в силу чётности функции $a_{2n+1} = 0$.
Моменты четного порядка вычисляют рекуррентно:

$$a_0 = 1 \qquad a_{2n} = (-1)^n c_{2n} (2n)! \qquad a_{2n-1} = 0, \tag{21}$$

где

$$c_0 = 1 \qquad c_{2n} = \frac{1}{4^n - 1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j} c_{2j}}{(2n-2j+1)!}.$$

Первые четыре из них равны, соответственно:

$$a_2 = \frac{1}{9},\ a_4 = \frac{19}{3^3 \cdot 5^2},\ a_6 = \frac{583}{3^5 \cdot 5 \cdot 7^2},\ a_8 = \frac{132809}{3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 17}$$

Для несимметричных моментов $\mathrm{up}(x)$

$$b_n = \int_0^1 x^n \,\mathrm{up}(x)\,dx \tag{22}$$

имеет место $b_{2n} = a_{2n}/2$ и

$$b_{2n-1} = \frac{1}{n\,2^{2n+1}} \sum_{j=0}^{n} a_{2j} C_{2n}^{2j}\,, \tag{23}$$

например, $b_1 = \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2},\ b_3 = \dfrac{143}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2},\ b_5 = \dfrac{1153}{2^2 \cdot 3^6 \cdot 7^2},\ b_7 = \dfrac{1616353}{2^4 3^7 5^3 7 \cdot 17}.$

8. Функция $\mathrm{up}(x)$ обладает интересным и важным свойством: ее моменты связаны со значениями в двоично-рациональных точках

$$\mathrm{up}\left(1-2^{-n}\right) = \frac{b_{n-1}}{(n-1)!\,2^{n(n-1)/2}}\,. \tag{24}$$

Это позволяет вычислять ее значения в данных точках посредством формул для моментов (21)–(23):

$$\mathrm{up}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{up}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{2^3 3^2}, \qquad \mathrm{up}\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{2^5 3^2}, \qquad \mathrm{up}\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{143}{2^{10} 3^4 5^2}.$$

9. Свойство 8 позволяет получить для вычисления значений функции $\mathrm{up}(x)$ на отрезке $[0;1]$ эффективный ряд специального вида

$$\mathrm{up}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s_k} p_k}{2^{k(k-1)/2}} \sum_{j=0}^{k} \frac{b_{k-j-1}}{(k-j-1)!\,j!} (\{|x|\cdot 2^k\})^j$$

где $b_{-1} = 1$, $p_k = [|x|\cdot 2^k] \bmod 2$ - разряды двоичного представления аргумента $x = \overline{0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots}$, $s_k = \sum_{j=1}^{k} p_j$.

10. Функция $\mathrm{up}(x)$ не является аналитической ни в одной точке своего носителя. Соответствующий ряд Тейлора имеет либо нулевой радиус сходимости, либо сходится к другой функции. Поэтому для представления $\mathrm{up}(x)$ невозможно использовать степенные ряды. Однако при периодическом продолжении с периодом 2π функция $\mathrm{up}(x)$ имеет быстро сходящееся разложение в ряд Фурье (с шагом $2\pi/2 = \pi$) по нечетным гармоникам:

$$\mathrm{up}(x) = 0,5 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Up}(\pi k) \cos\left[\pi(2k-1)x\right], \tag{25}$$

где $\mathrm{Up}(x)$ — преобразование Фурье $\mathrm{up}(x)$.

Практическое вычисление $\mathrm{up}(x)$

Наиболее прост в реализации метод, основанный на ряде Фурье (25). Заменим в (25) бесконечную сумму ряда и бесконечное произведение на конечные. Получим приближенную формулу для вычисления $\mathrm{up}(x)$:

$$up(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{K} \prod_{m=1}^{M} \frac{\sin(\pi k 2^{-m})}{(\pi \kappa 2^{-m})} \cos(\pi k x).$$

Однако данная формула имеет существенный недостаток, так как требует вычисления отношения $\sin(t)/t$ при t близких к 0. Чтобы избежать этого, воспользуемся тождеством

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(2^{-k} t).$$

Окончательно получим:

$$\mathrm{up}(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{K} \left(\left(\prod_{m=1}^{M} \cos^{m} \left(\frac{\pi k}{2^{m+1}} \right) \right) \cos(\pi k x) \right)$$

Программная реализация.

$$\mathrm{up}(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{K}\left(\left(\prod_{m=1}^{M}\cos^m\left(\frac{\pi k}{2^{m+1}}\right)\right)\cos(\pi k x)\right)$$

```
y=0.5;
for(k=1;k<k_max;k++)
   {
   psin=1;
   t=(pi*k)/2;
   for(m=1;m<m_max;m++)
     {
     t=t/2;
     psin=psin*pow(cos(t),m);
     }
   psin=psin*cos((pi*k)*x);
   y=y+psin;
   }
return y;
```

Во внутреннем цикле вычисляется произведение

$$\prod_{m=1}^{M}\cos^m\left(\frac{\pi k}{2^{m+1}}\right).$$

Во внешнем цикле задается аргумент πk для произведения, осуществляется домножение на $\cos(\pi k x)$ и суммирование.

Результатом вычисления является приближенное значение $\mathrm{up}(x)$

Более эффективный алгоритм можно получить, используя свойства 7-9 моментов $\mathrm{up}(x)$. Заменяя бесконечную сумму конечной, получим:

$$\mathrm{up}(x) \approx 1 + \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{s_k} p_k}{2^{k(k-1)/2}} \sum_{j=0}^{k} \frac{b_{k-j-1}}{(k-j-1)!\,j!} (\{|x| \cdot 2^k\})^j.$$

Заметим, что значения моментов b_i не зависят от x, поэтому их можно вычислить один раз в начале работы программы. Более эффективную реализацию можно получить, вычислив заранее все слагаемые $b_{k-j-1} \big/ (k-j-1)!\,j!$.

Чтобы не вычислять произведение факториалов в знаменателе, можно заменить его соответствующим биномиальным коэффициентом

$$\frac{b_{k-j-1}}{(k-j-1)!\,j!} = \frac{1}{(k-1)!} C_{k-1}^{j} b_{k-j-1}.$$

p_k- двоичные разряды числа x могут принимать значения 0 или 1. Если $p_k = 0$, вычислять соответствующую внутреннюю сумму не нужно.

```
double up(double x,int n, double* b)
{
double y,bb,bbb,xx,xxx;
int j,k,s;
x=fabs(x); xx=x; y=1; s=1;
for(k=1;k<n-2;k++)
  {
  bb=0;
  xx=xx*2;
  if (xx>=1)  //проверка p_k =1
    {
    xx=xx-1;
    xxx=1;
    for(j=0;j<k;j++)
      { //внутренняя сумма
      bbb=b[k-j-1];
      bbb=bbb/faktorial(k-j-1);
      bbb=bbb/faktorial(j);
      bbb=bbb*xxx;
      bb=bb+bbb;
      xxx=xxx*xx;
      }
//Дополнительное слагаемое
//при  j = k
      bbb=1;
      bbb=bbb/faktorial(k);
      bbb=bbb*xxx;
      bb=bb+bbb;
      s=-s;
      bb=bb*s;
      j=k*(k-1);
      j=j/2;
      bb=bb/pow(2,j);
      }
    y=y+bb;
    }
return(y);
}
```

При вычислении важно учитывать что

$0! = 1$

Вычисление произведения факториалов в знаменателе можно заменить биномиальным коэффициентом (см. далее).

Вычисление моментов b_i осуществляем в несколько этапов:

1. Создаем массив `b[i]` длины K.
2. Вычисляем `b[2*i]`$=c_{2i}$ по рекуррентной формуле.
3. Вычисляем a_{2i} по c_{2i}. Так как коэффициенты c_{2i} больше не нужны, записываем a_{2i} поверх c_{2i}: `b[2*i]`$=a_{2i}$.
4. Вычисляем b_{2i-1} по a_{2i} и записываем их в нечетные ячейки массива.
5. Вычисляем b_{2i} по a_{2i} и записываем их поверх a_{2i}

Массив b_i готов.

```
void init_c(int n, double* c)
{
int i,j;
double cc;
for(i=1,c[0]=1;i<n;i++)
  {
  c[2*i]=0;
  for(j=0;j<i;j++)
     {
     cc=faktorial(2*i-2*j+1);
     cc=c[2*j]/cc;
     cc=cc*pow(-1,i-j);
     c[2*i]=c[2*i]+cc;
     }
  cc=pow(4,i)-1;
  c[2*i]=c[2*i]/cc;
  }
}
```

Вычисление вспомогательных коэффициентов c_{2i} по рекуррентной формуле

$$c_0 = 1 \qquad c_{2n} = \frac{1}{4^n - 1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-j}c_{2j}}{(2n-2j+1)!}.$$

```
void init_a(int n,
double* a, double* c)
{
int i;
double aa;
a[0]=1;
for(i=1;i<n;i++)
  a[2*i-1]=0;
for(i=1;i<n;i++)
  {
  aa=c[2*i];
  aa=aa*pow(-1,i);
  aa=aa*faktorial(2*i);
  a[2*i]=aa;
  }
}
```

Вычисление a_{2i} по c_{2i} по формуле

$$a_0 = 1 \qquad a_{2n} = (-1)^n c_{2n} (2n)! \qquad a_{2n-1} = 0,$$

```
void init_b(int n, double* b,
double* a, int* binomials)
{
int i,j;
double bb,bbb;
for(i=1;i<n;i++)
  {
  b[2*i-1]=0;
  bb=0;
  binom(2*i,binomials);
  for(j=0;j<i+1;j++)
    {
    bbb=binomials[2*j];
    bbb=bbb*a[2*j];
    bb=bb+bbb;
    }
  bbb=i*pow(2,2*i+1);
  bb=bb/bbb;
  b[2*i-1]=bb;
  }
for(i=0;i<n;i++)
b[2*i]=a[2*i]*0.5;
}
```

Вычисление b_{2i-1} по формуле

$$b_{2n-1} = \frac{1}{n\,2^{2n+1}} \sum_{j=0}^{n} a_{2j} C_{2n}^{2j}$$

Затем вычисление b_{2i}

$$b_{2n} = a_{2n}/2.$$

Такой порядок вычислений позволяет использовать только один массив так как новые значения записываются поверх уже не нужных.

```
init_c(n/2,b);
init_a(n/2,b,b);
init_b(n/2,b,b,binomials);
```

О вычислении биномиальных коэффициентов

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

В формуле (23) участвуют биномиальные коэффициенты. Обычно они задаются формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

но проводить вычисления по этой формуле неудобно, так как числитель и знаменатель дроби растут очень быстро.

Гораздо удобнее воспользоваться треугольником Паскаля и связанным с ним тождеством

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Вычисление $\int\limits_{-1}^{1} up^2(x)dx$

В силу равенства Парсеваля

$$\int\limits_{-1}^{1} up^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^k}}{\frac{x}{2^k}}\right)^2 dx\,. \tag{26}$$

Таким образом,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2^k}}{\frac{x}{2^k}}\right)^2 dx\,.$$

Но

$$\prod_{k=1}^{n}\sin^2\frac{x}{2^k} = 2^{-n}\sum_{k=0}^{2^n-1}a_k^{(n)}\cos\frac{k}{2^{n-1}}x;. \tag{27}$$

где $a_k^{(n)}$ вычисляются по формуле

$$a_{2k}^{(n)} = a_k^{(n-1)}, \quad a_{2k+1}^{(n)} = -\frac{1}{2}\left(a_{k+1}^{(n-1)} + a_k^{(n-1)}\right) \text{ при } k > 0,$$
$$a_1^{(n)} = -a_0^{(n-1)} - \frac{1}{2}a_1^{(n-1)}, \quad a_0^{(1)} = 1, \quad a_1^{(1)} = -1. \tag{28}$$

Поэтому

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{C_{R,r}} 2^{n^2} z^{-2n} \sum a_k^{(n)} e^{ik2^{-n}z} dz, \tag{29}$$

После подсчета вычетов

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 2^{n^2+2n-2} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k^{(n)} (k2^{-n})^{2n-1}. \tag{30}$$

Подсчеты для $n = 2, 3, 4$ дают

$$\gamma \approx \frac{5}{6}, \quad \gamma \approx \frac{391}{480}, \quad \gamma \approx 0{,}805.. \tag{31}$$

Вычисление атомарной функций $up(x)$ при помощи последовательности Морса-Туэ

$$up'(x) = 2up(2x+1) - 2up(2x-1)$$

1															
1	-1														
1	-1	-1	1												
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1								
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
1	0	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	1	0	-1	0
1	1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	1	1	0	0
1	2	2	2	1	0	0	0	-1	-2	-2	-2	-1	0	0	0
1	3	5	7	8	8	8	8	7	5	3	1	0	0	0	0

Нормировочный коэффициент: $\max = 2^{2+\ldots+(n-2)}$

Вычисление $up(x)$ как неподвижной точки оператора A.

$$A(f) = 2\int_{-1}^{x} \big(f(2t+1) - f(2t-1) \big)\, dt$$

1															
1	-1														
1	0														
1	0	-1	0												
1	1	0	0												
1	1	0	0	-1	-1	0	0								
1	2	2	2	1	0	0	0								
1	2	2	2	1	0	0	0	-1	-2	-2	-2	-1	0	0	0
1	3	5	7	8	8	8	8	7	5	3	1	0	0	0	0

Нормировочный коэффициент: $\max = 2^{2+\ldots+(n-2)}$

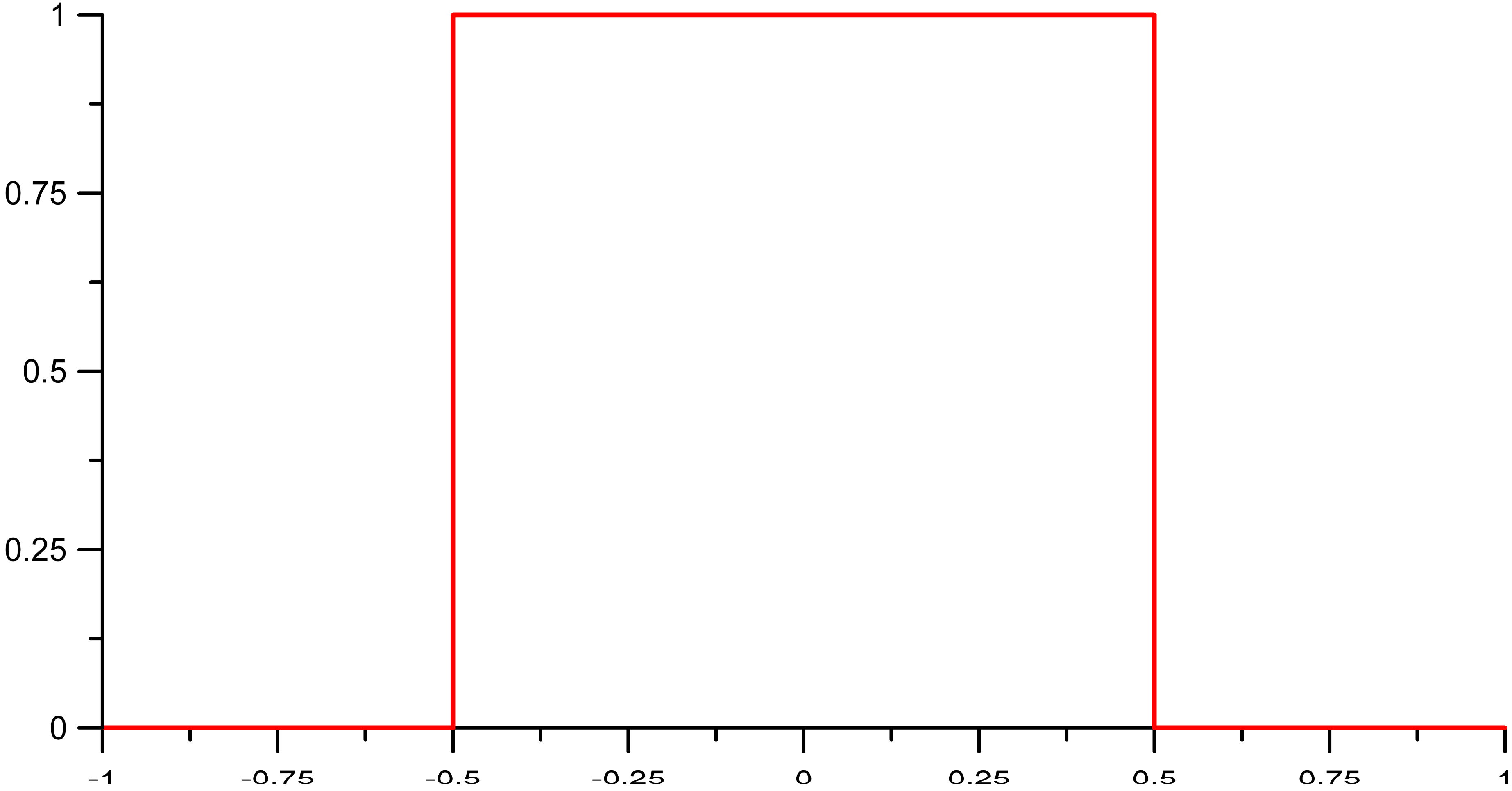

Рис. 6а). Приближение up(x) ступенчатыми функциями

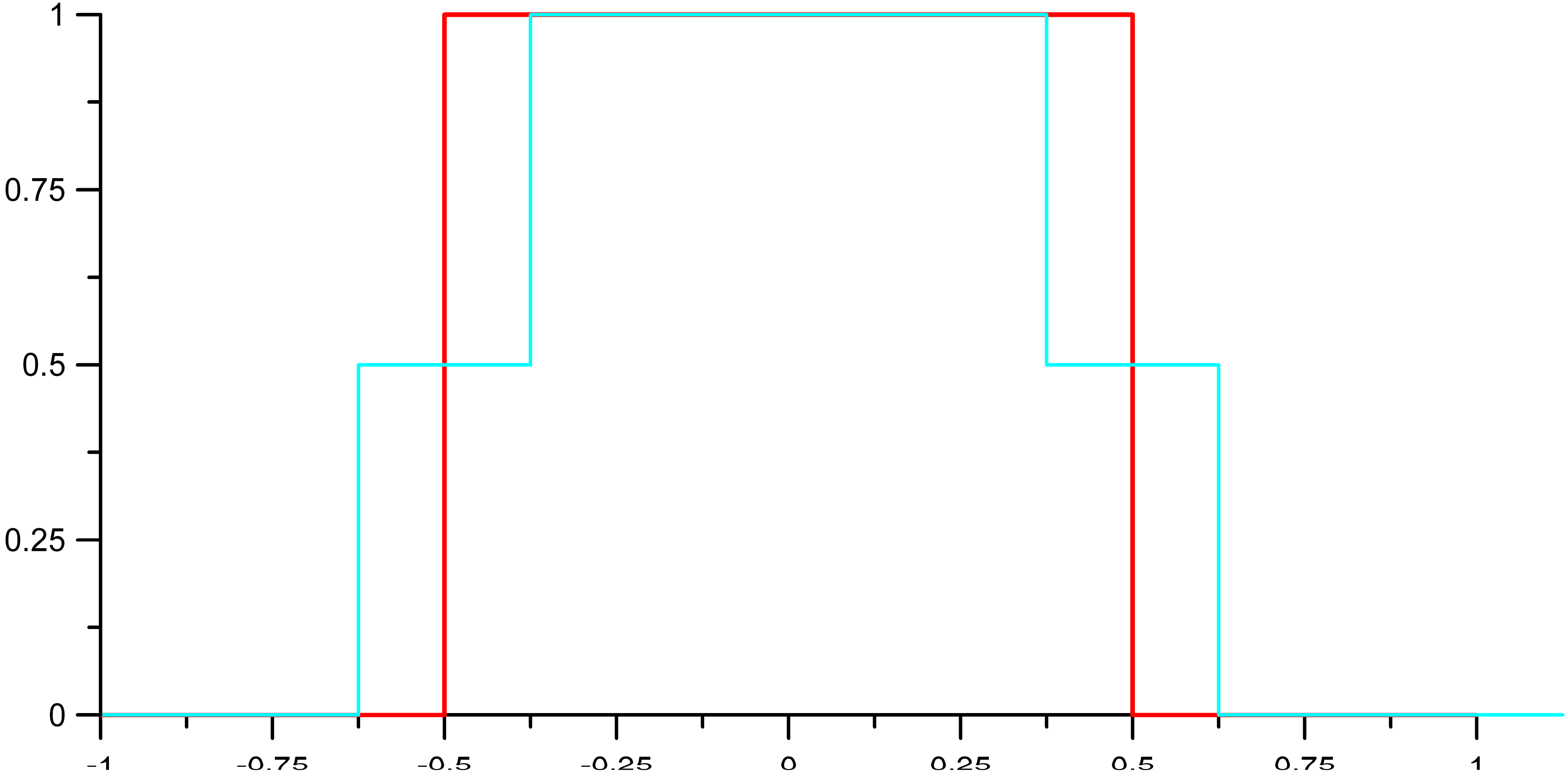

Рис. 6б). Приближение up(x) ступенчатыми функциями

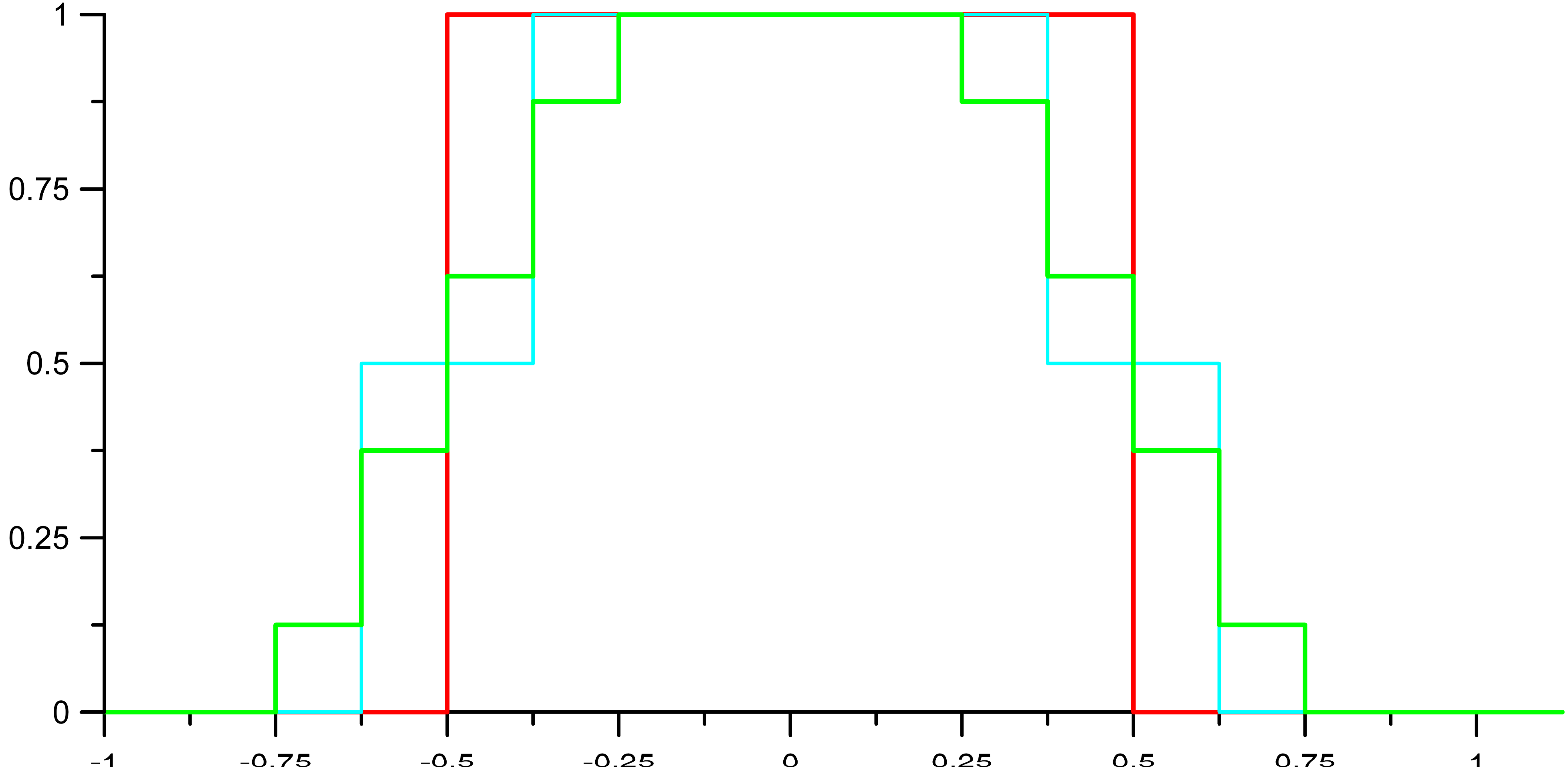

Рис. 6в). Приближение up(x) ступенчатыми функциями

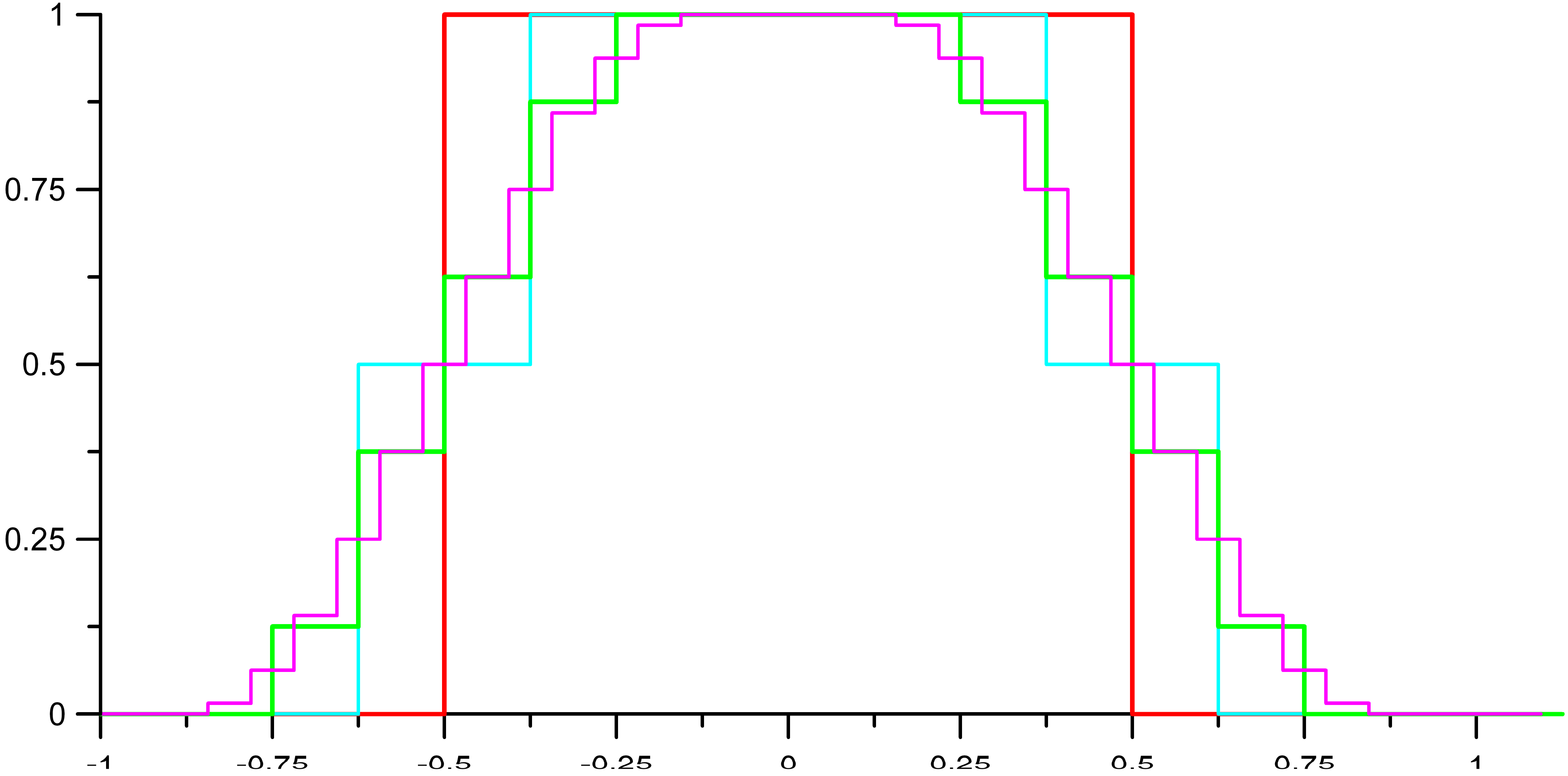

Рис. 6г). Приближение up(x) ступенчатыми функциями

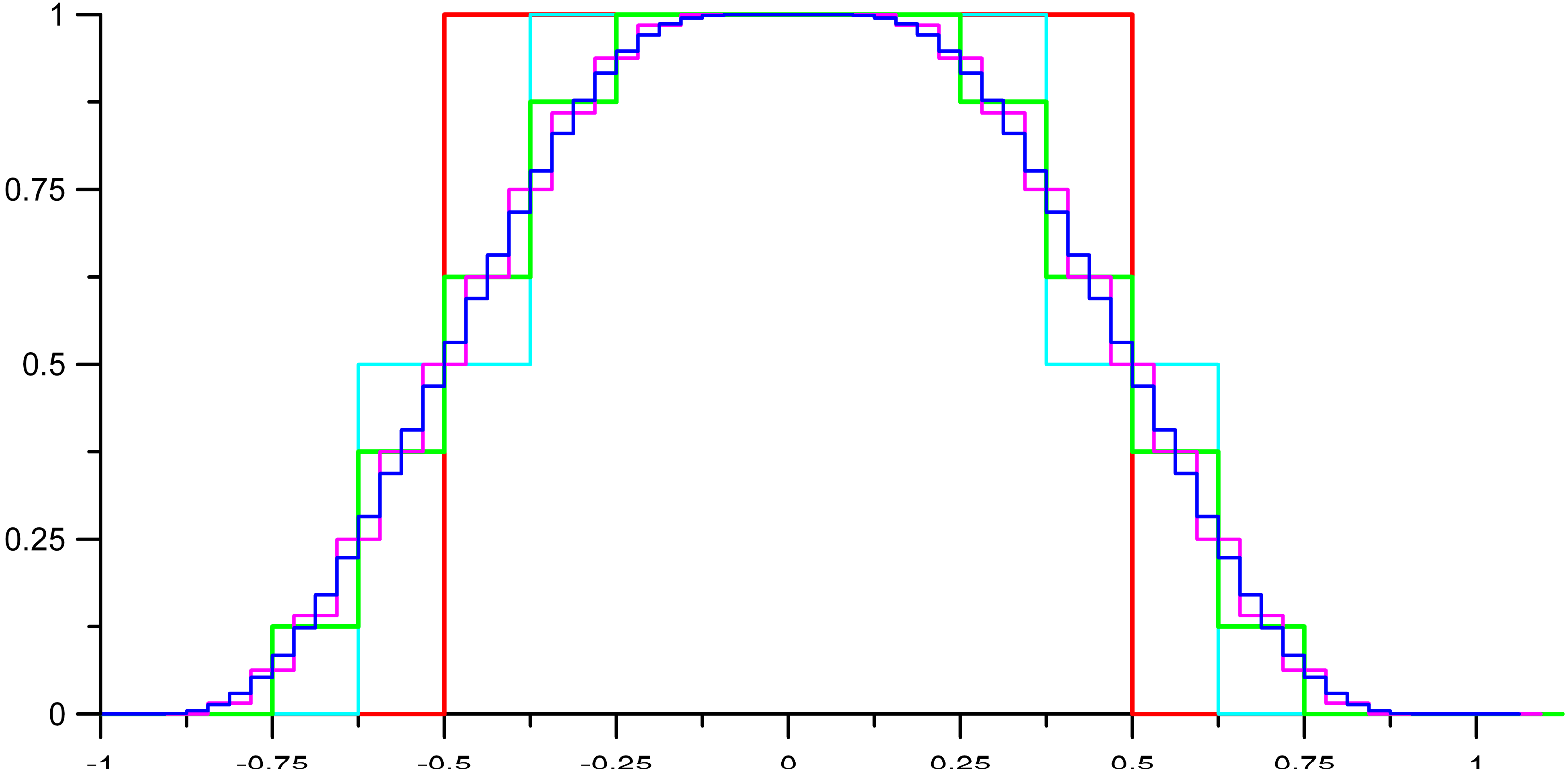

Рис. 6г). Приближение up(x) ступенчатыми функциями

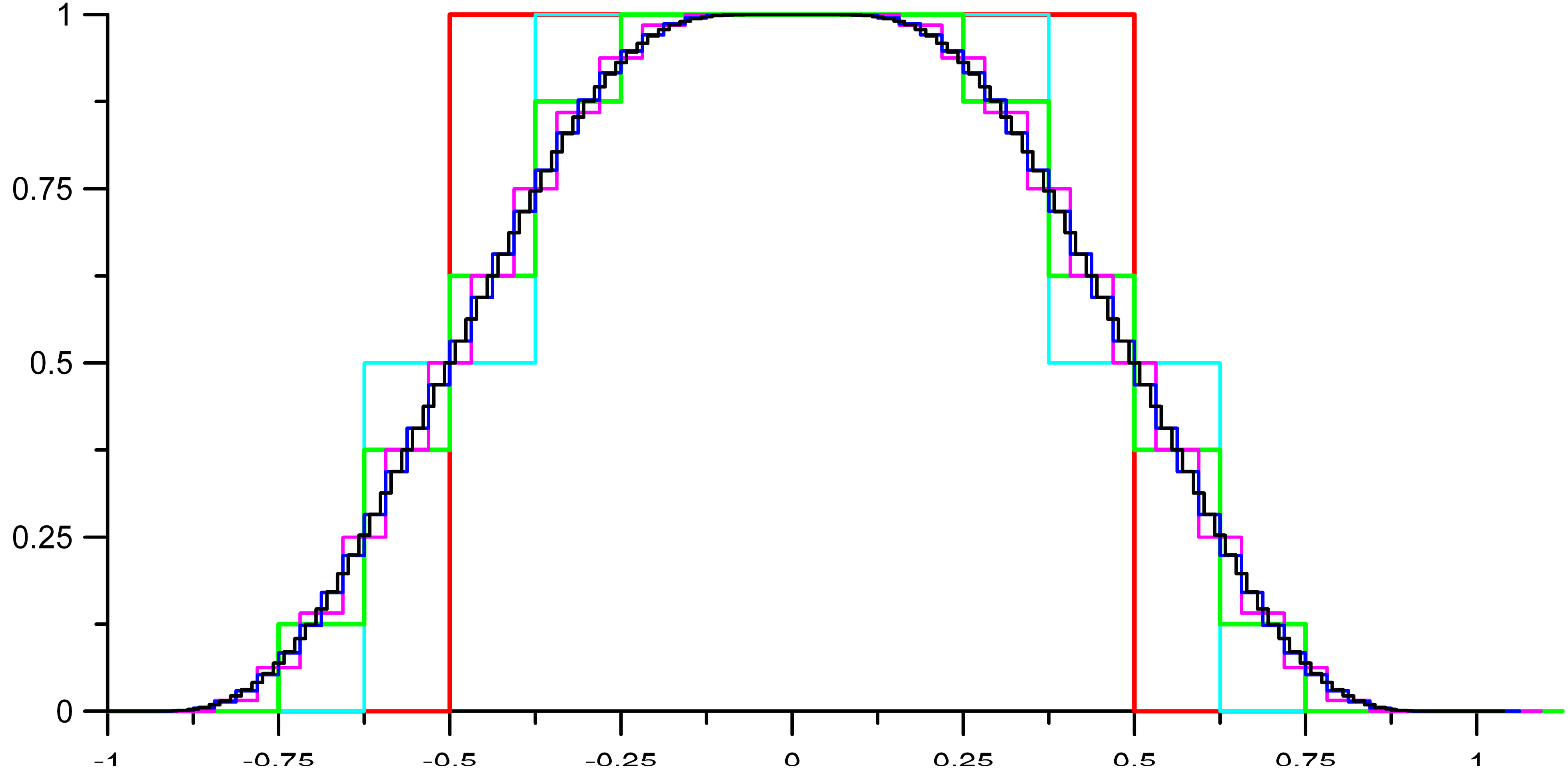

Рис. 6д). Приближение up(x) ступенчатыми функциями

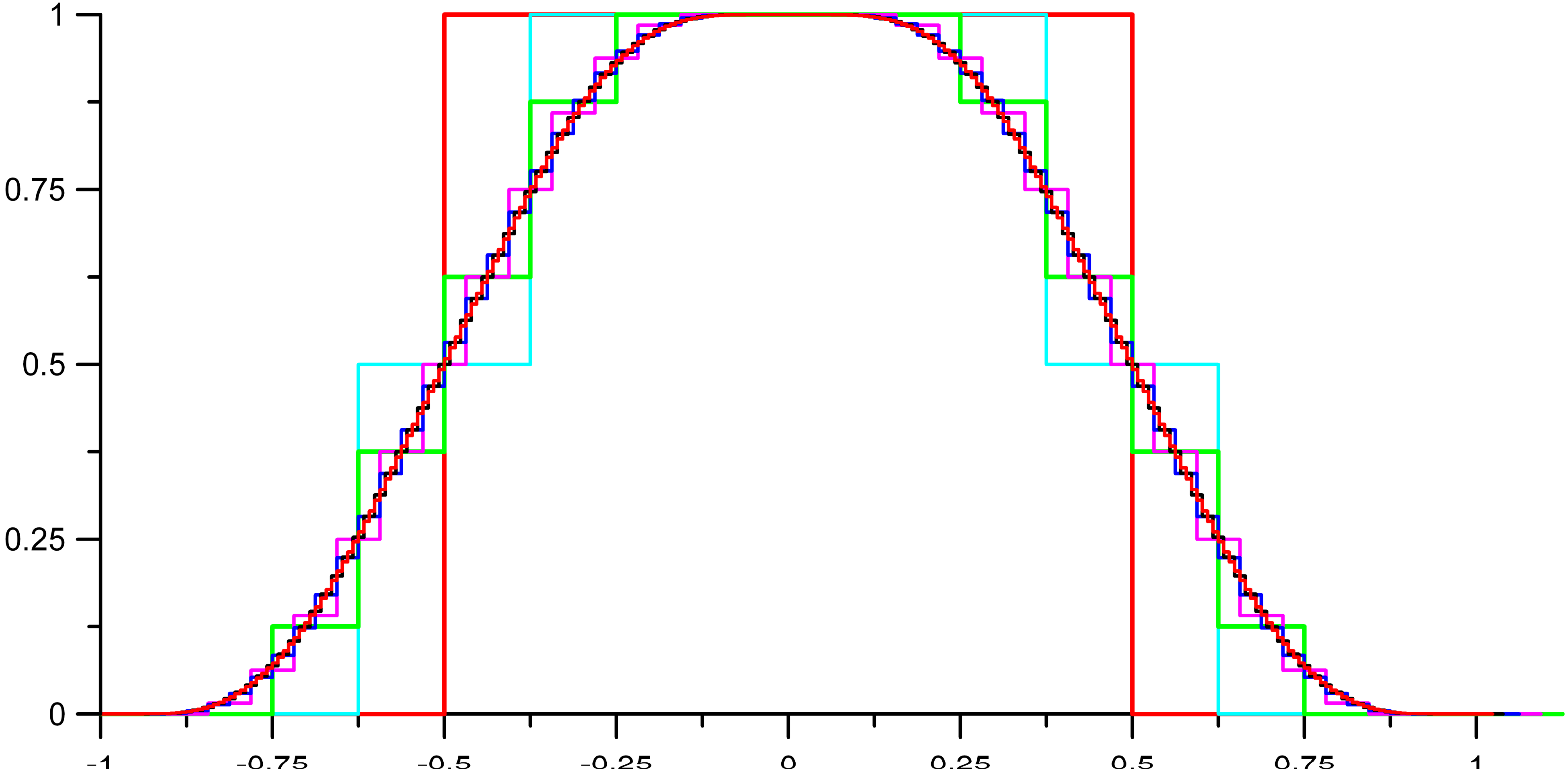

Рис. 6е). Приближение up(x) ступенчатыми функциями

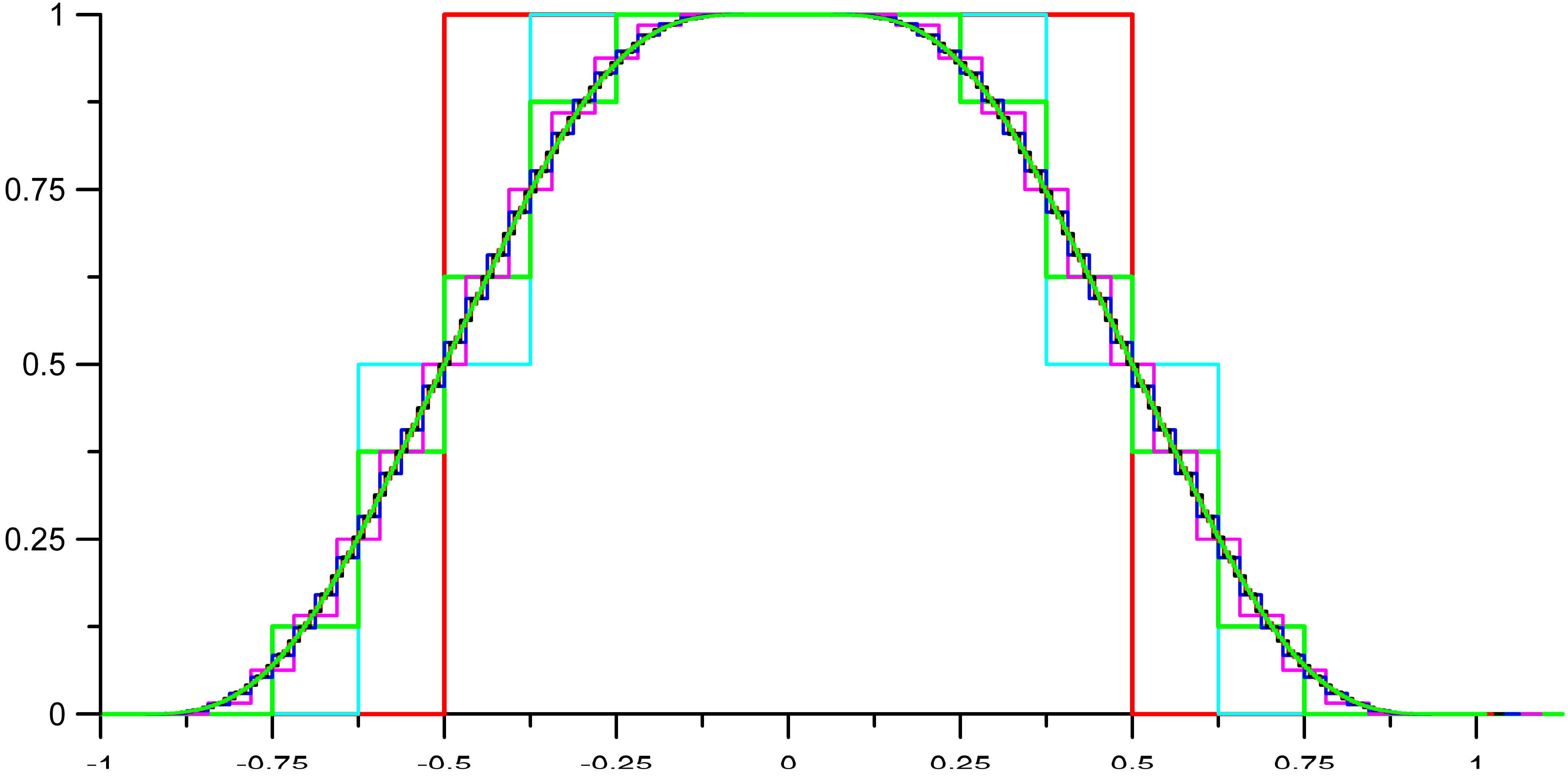

Рис. 6ж). Приближение up(x) ступенчатыми функциями

Свойства оператора A

$$A(f) = 2\int_{-1}^{x} \big(f(2t+1) - f(2t-1) \big)\, dt$$

Оператор A является сжимающим в различных пространствах финитных функций. Функция $up(x)$ - его неподвижная точка.

Производные $up^{(n)}(x)$ являются его собственными функциями с собственными числами 2^{-n}.

Если для итерационного процесса $f_{n+1} = A(f_n)$ в качестве нулевого приближения взять константу $f_0 = \frac{1}{2}$, то получим последовательность f_n совершенных сплайнов, приближающихся к АФ $up(x)$.

Каждая f_n является сплайном степени n и составлена из 2^n многочленов.

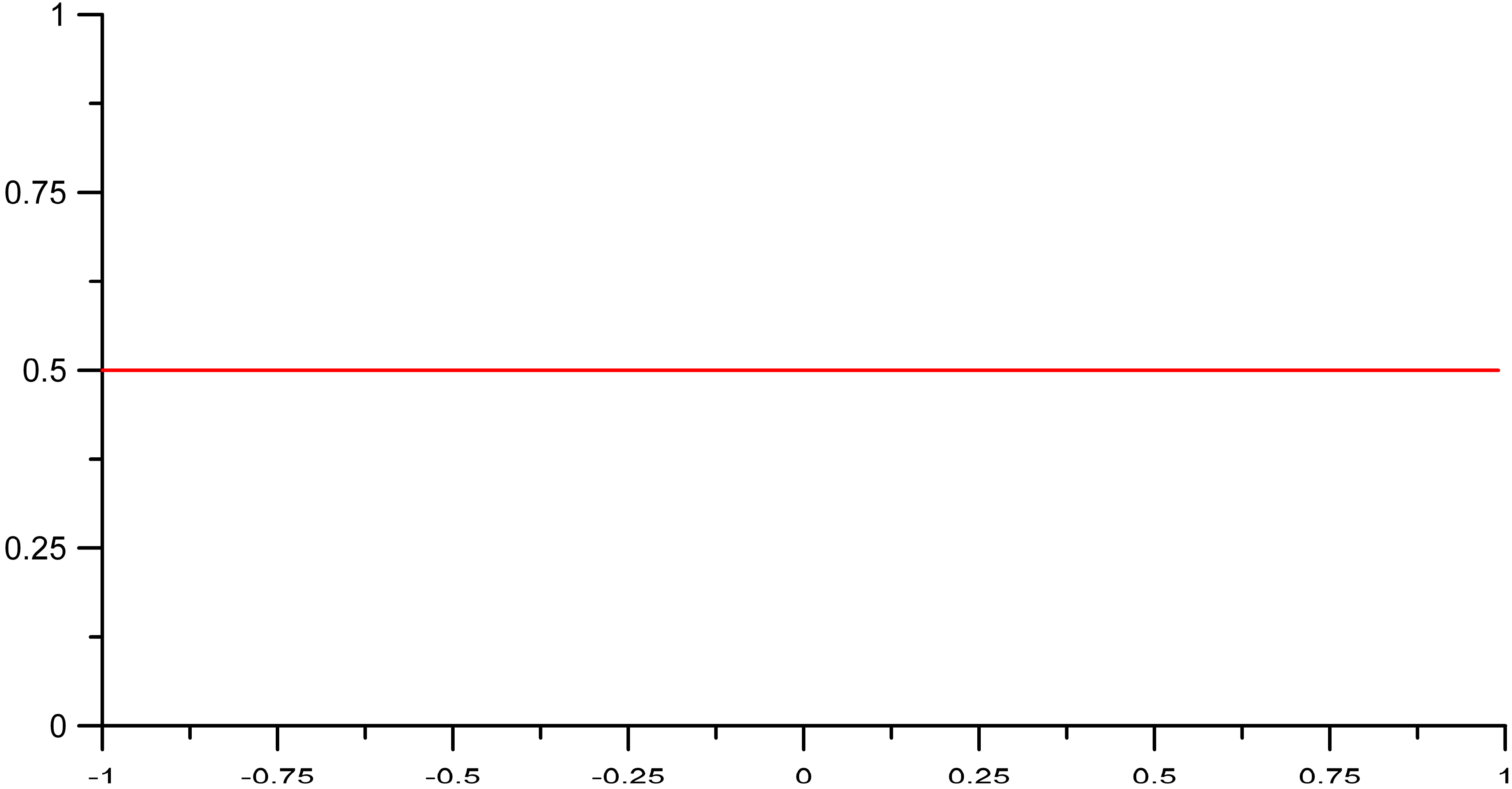

Рис. 7а). Приближение up(x) совершенными сплайнами

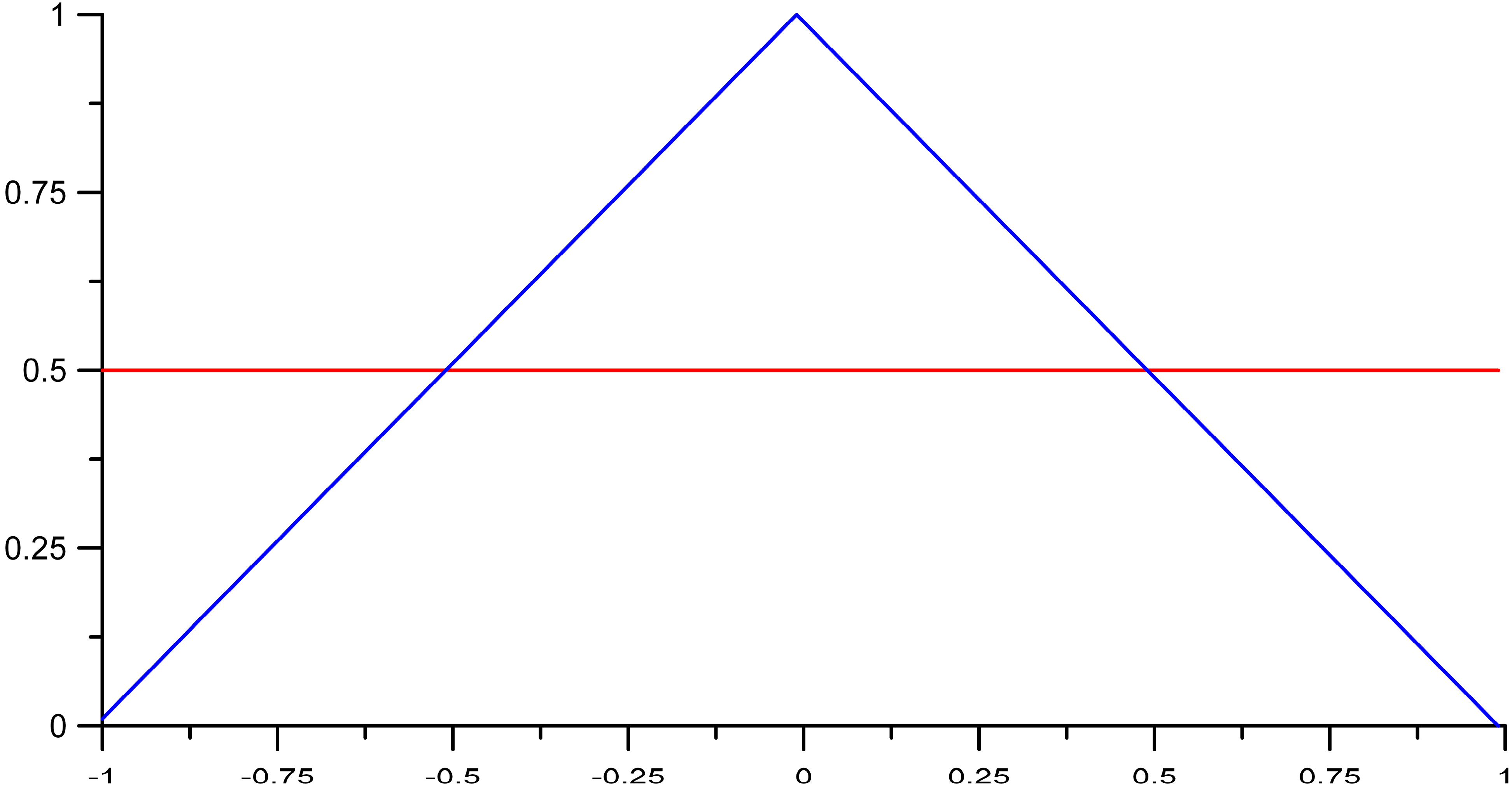

Рис. 7б). Приближение up(x) совершенными сплайнами

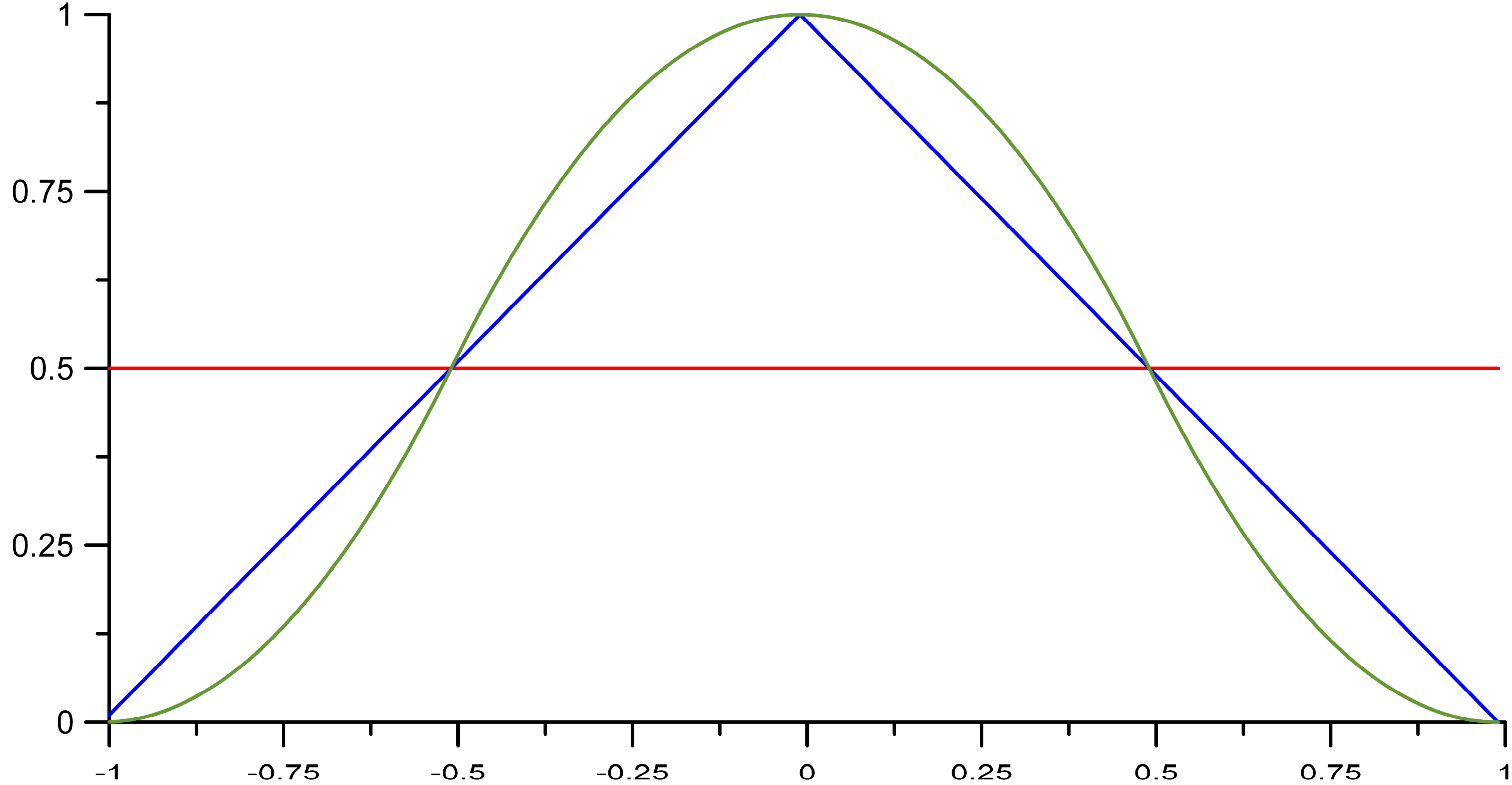

Рис. 7. Приближение up(x) совершенными сплайнами

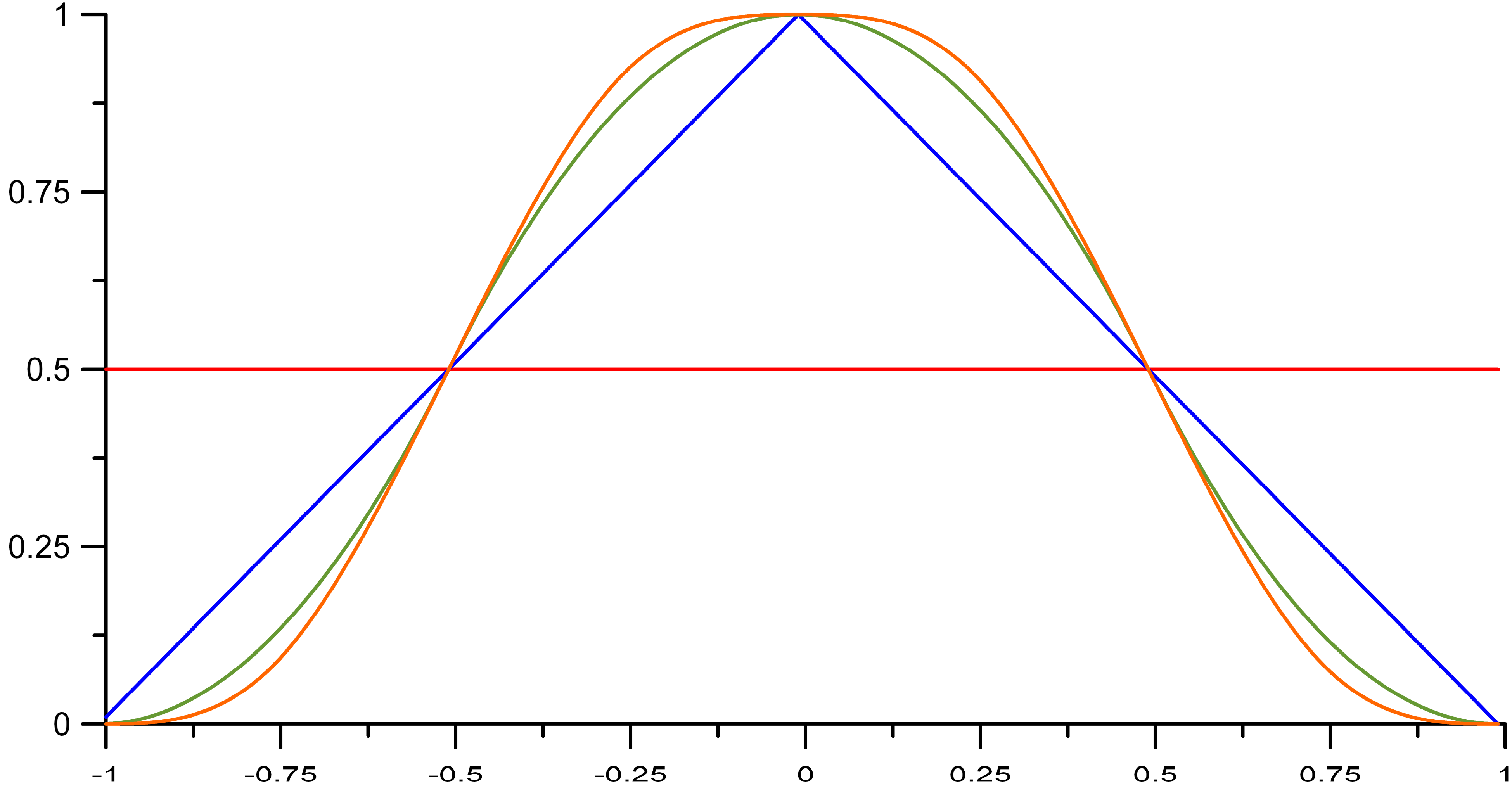

Рис. 7. Приближение up(x) совершенными сплайнами

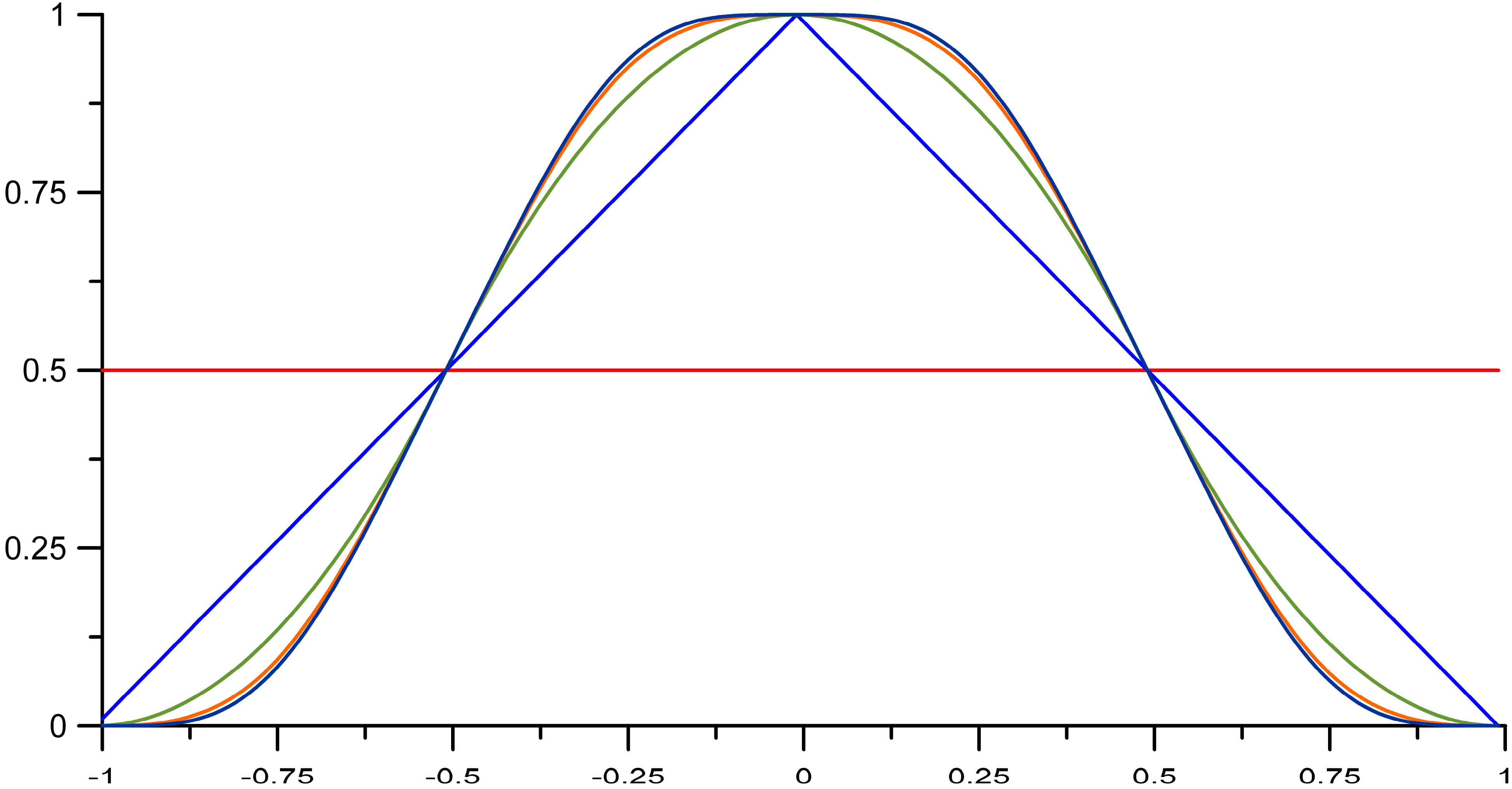

Рис. 7. Приближение up(x) совершенными сплайнами

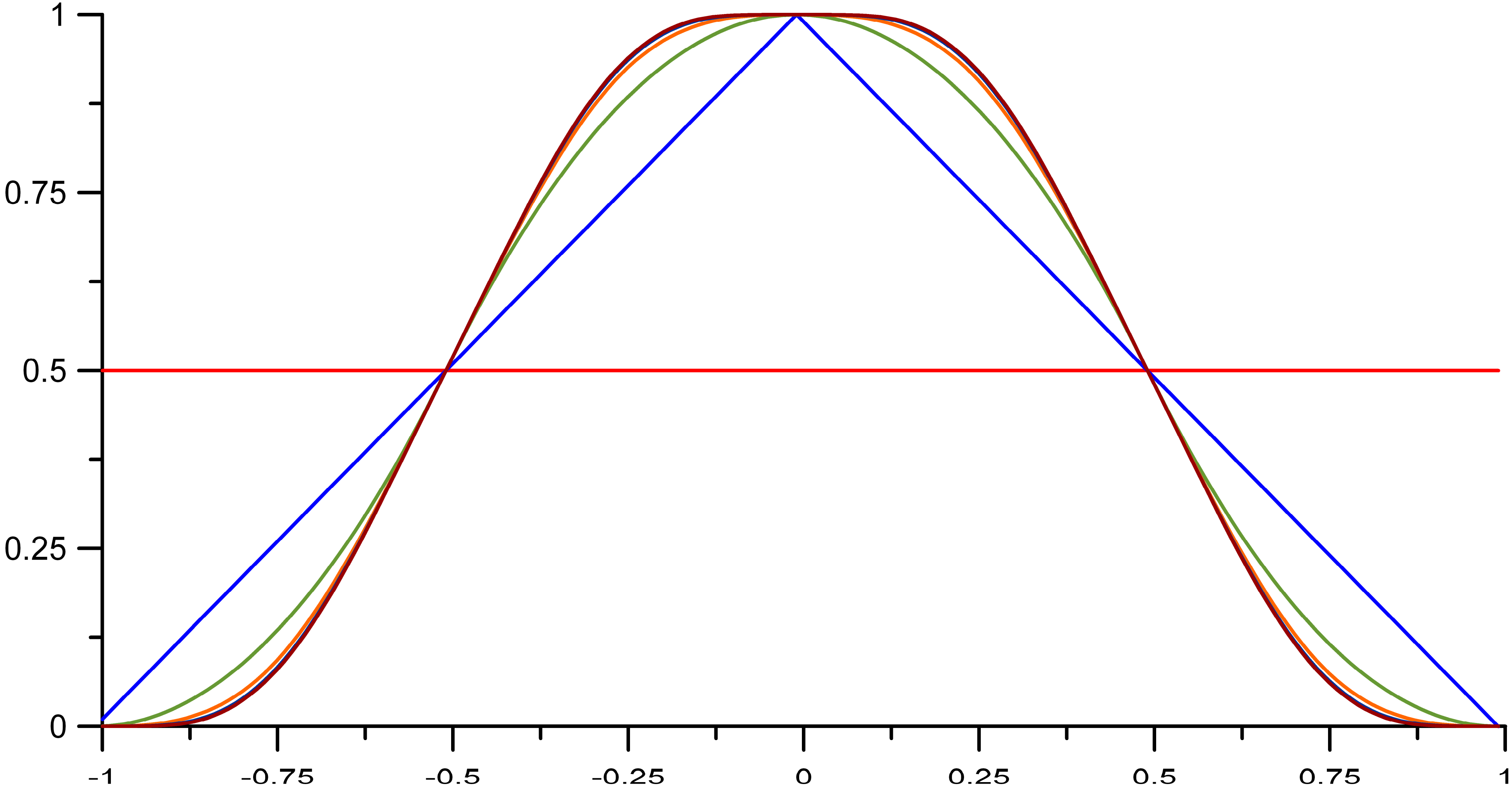

Рис. 7. Приближение up(x) совершенными сплайнами

Свойства преобразования Фурье АФ $\mathbf{up}(\mathbf{x})$.

Преобразование Фурье функции $\mathrm{up}(x)$ имеет вид

$$\mathrm{Up}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{up}(x) \mathrm{e}^{-ixt}\, dx = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(t\, 2^{-k}\right)}{t\, 2^{-k}}$$

и обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{Up}(t)$— целая функция конечной степени с показателем σ.
2. $\mathrm{Up}(t)$— функция чётная: $\mathrm{Up}(t) = \mathrm{Up}(-t)$.
3. Функция имеет максимум, равный 1 в точке $t = 0$.
4. Её нули в точках $t = 2n\,\pi$: $\mathrm{Up}(2n\,\pi) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Первый ноль она имеет в точке $t = 2\pi$.
5. Кроме того, $\mathrm{Up}\left(t - 2^p n\pi\right) = \begin{cases} 1, & \text{в точке } t = 2^p n\pi,\ p = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{в точке } t = 2m\pi, \text{ где } m \neq n,\ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$
6. Теорема сложения: $\mathrm{Up}(t \pm y) = \sum \mathrm{Up}\left(t \pm 2^p n\pi\right) \mathrm{Up}\left(y - 2^p n\pi\right)$.

7. Теорема умножения: $\mathrm{Up}(2t)=\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{Up}(t)$, $\mathrm{Up}(3t)=\frac{\sin\left(\frac{3}{2}t\right)}{\frac{3}{2}t}\mathrm{Up}\left(\frac{3}{2}t\right)$,

$\mathrm{Up}(2pt)=\prod_{n=1}^{p}\frac{\sin(nt)}{nt}\mathrm{Up}(t)$, $\mathrm{Up}(nt)=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\frac{n}{2}t}\mathrm{Up}\left(\frac{n}{2}t\right)$, где n — нечётное число.

8. $\mathrm{Up}(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(t\,2^{-k}\right)}{t\,2^{-k}}=\prod_{m=1}^{\infty}\cos^{m}\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)$.

9. Ряды по функциям $\mathrm{Up}(t)$, если $R(z)\in W_{\sigma}$, то

$$R(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R\left(2^{p}n\pi\right)\mathrm{Up}\left(z-2^{p}n\pi\right).$$

10. Разложение единицы: $\sum\mathrm{Up}(t-2n\pi)=1$.

11. Интеграл от $\mathrm{Up}(t)$: $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Up}(t)\,dt=1$.

12. Производная от $\mathrm{Up}(t)$: $\frac{\partial\,\mathrm{Up}(t)}{\partial t}=\mathrm{Up}(t)\sum\frac{\partial}{\partial t}\left[\ln\frac{\sin\frac{t}{2^k}}{\frac{t}{2^k}}\right]$.